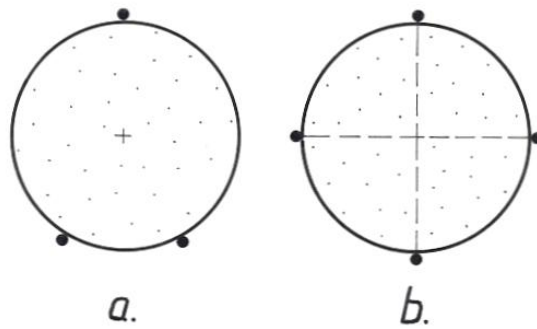


KONVEX ALAKZATOK RÖGZÍTÉSE

Írta: Hajdu Endre

A geometria az alakzatokkal foglalkozik, kevésbé azok mozgásával, még kevésbé azok rögzítésének módjával. Ezért található oly kevés irodalom a címben jelölt témakörrel. A hatvanas években megjelent dolgozatában [1] Tomor Benedek azt a kérdést tárgyalta, hogy egy rajztáblára helyezett pénzdarabot a pereme mentén leszúrt gombostűkkel miképpen lehet eltolás ellen rögzíteni, illetőleg általában egy konvex lemez eltolását egy fix pontrendszerrel meggátolni. Ismertette a rögzítés témakörében alapvető fogalmat, a primitív rögzítő rendszert. Ez olyan pontrendszer, mely rögzít, de egyetlen fölösleges eleme sincs, vagyis bármely elemét elhagyva, már elmozdítható az alakzat. Egy körlemeznek például két primitív rögzítő rendszerét mutatja az 1. ábra.

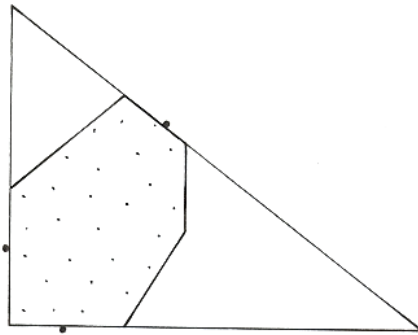


1. ábra

Tomor dolgozatának legfontosabb megállapítása az, hogy „sima” peremű konvex lemez primitív rögzítő rendszere legfeljebb 4 pontból áll, ha csak eltolás ellen kívánjuk rögzíteni a lemezt. Megemlítette, hogy lényegesen nehezebb problémákhoz jutunk, ha más mozgástípust is figyelembe veszünk. A továbbiakban nem találkoztam a rögzítés-geometriával kapcsolatos anyagokkal sem a hazai, sem a külföldi irodalomban, a Tomor-dolgozatban szereplő két munkán kívül. Magam próbálkoztam tájékozódni, tovább gondolni a témakört, egyetlen feltevését elhagyva a két említett ismert irodalomnak; azt a gyakorlati szempontból bizarrnak tűnő feltevést, hogy csúcspontba is kerülhet rögzítő pont. A továbbiakban elsőfajú rögzítésről beszélek, ha csak az eltolást gátolja a rögzítő pontrendszer, másodfajúnak, ha az elforgatásokat, végül harmadfajúnak, ha a csavarmozgásokat. Az első két rögzítésfajta vizsgálható a síkban és a térben, de itt csak a síkbeli rögzítésekről lesz szó. A rögzítésekkel kapcsolatos érdekesebb kérdések közé a maximális elemszámú primitív rögzítő rendszerek keresése

tartozik. Vagyis az, hogy miképpen lehet a legnagyobb elemszámú, de még felesleges rögzítő pontot nem tartalmazó rögzítő rendszert szerkeszteni.

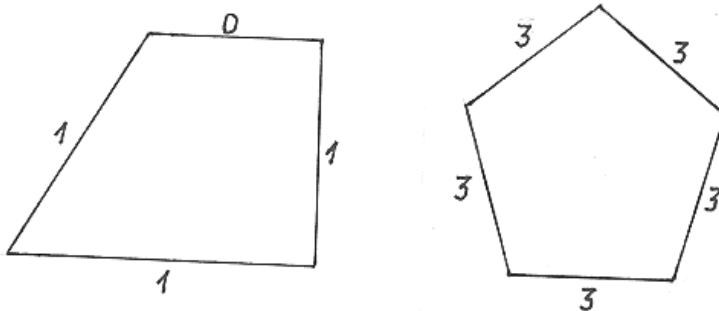
Az elsőfajú rögzítés témájában részemről talán az jelenthet új észrevételt, hogy néhány számszerű összefüggést sikerült megállapítani. A konvex sokszögek általában (a paralelogrammák kivételével) befoglalhatók egy vagy több olyan háromszögbe, melynek oldalai tartalmazzák a sokszöglemez három oldalát (2. ábra), s mivel egy háromszög elsőfajú rögzítése három rögzítő ponttal megoldható, kiszámítottam, hogy maximálisan hány módon lehet egy sokszöget ilyen módon rögzíteni.



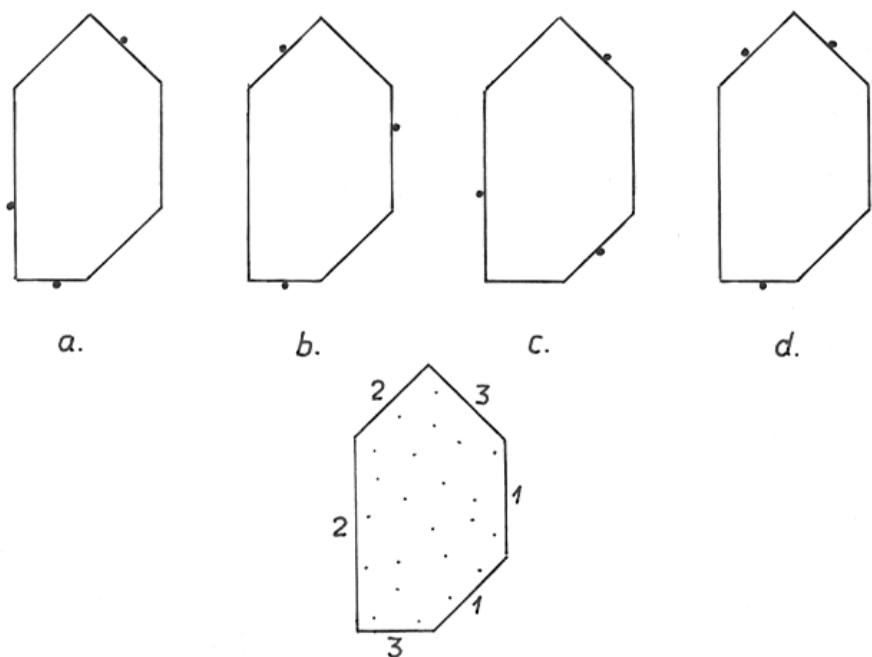
2. ábra

Ha az oldalszám páratlan, akkor a lehetőségek száma $l_{\max} = \frac{(n^2 - 1)n}{24}$. Ha az oldalszám páros, akkor a lehetőségek maximális száma $l_{\max} = \frac{(n^2 - 4)n}{24}$.

Egy sokszöglemez nem mindegyik oldala alkalmas egyenlő mértékben rögzítés szempontjából. Ezt a tényt tükrözi a sokszög oldalának rangja, mely azon legkisebb elemszámú, lényegesen különböző primitív rögzítő rendszerek száma, melyekben az oldal szerepel. A rang lehet 0 is, szabályos sokszög esetén minden oldal egyenlő rangú, de általában nagyon különböző rangúak is lehetnek az oldalak (3. ábra).

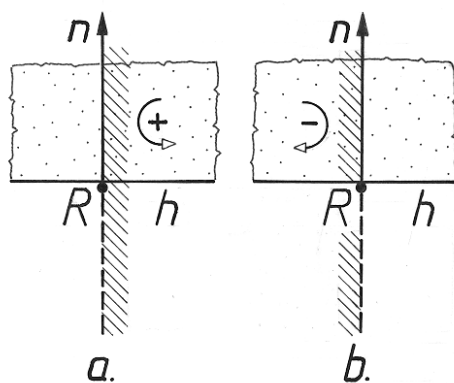


3 / 1. ábra



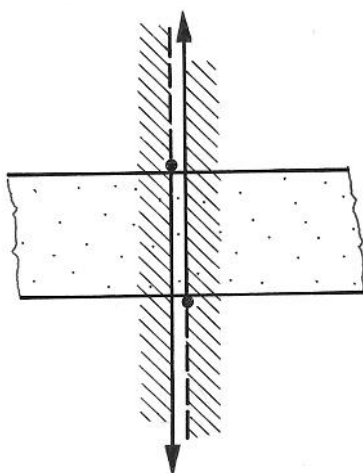
3 / 2. ábra

A másodfajú rögzítés, mely a lemez elforgatását gátolja, abból a tényből indul ki, hogy egy elforgatás mindig valamely pillanatnyi forgásközéppont, centrum körül történik; ha alkalmas rögzítő rendszerrel kizárjuk a szóba jöhető centrumokat, biztosítva van az alakzat másodfajú rögzítése. Valamely egyetlen rögzítő ponttal gátolt félsík esetén, mikor a rögzítő pont a félsík határegyeneséhez kerül, a szabad-, ill. kizárt centrum-tartományokat a következők (4. ábra):



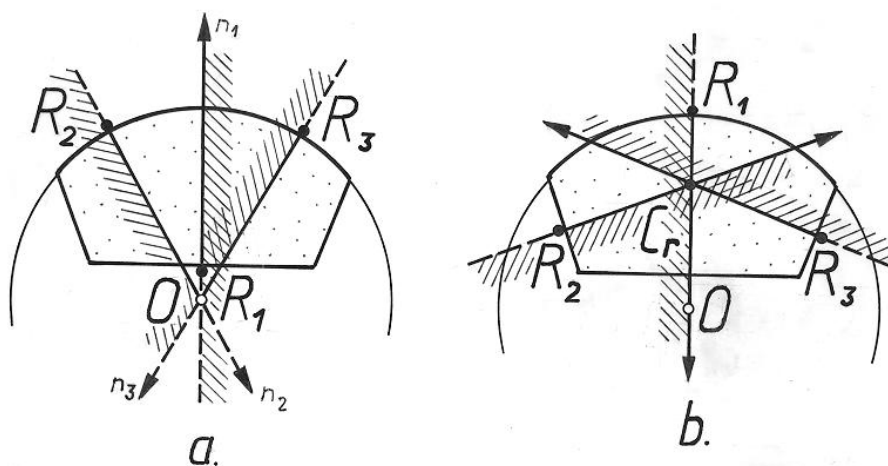
4. ábra

Figyelemre méltó, hogy az n támasznormális egyik fele mindkét forgásirány esetén kizárt, vagyis hatásos a rögzítés szempontjából, a másik fele szabad, azaz pontjai körül a félsík mindkét forgásirányba elforgatható. Egy sáv rögzítése esetén csak a + forgásirányhoz tartozó centrumtartományokat kissé eltolva szemléltetve érthető, hogy egy sáv két ponttal is rögzíthető (5. ábra). A negatív kizárt centrum-tartományok szintén lefednék a síkot.



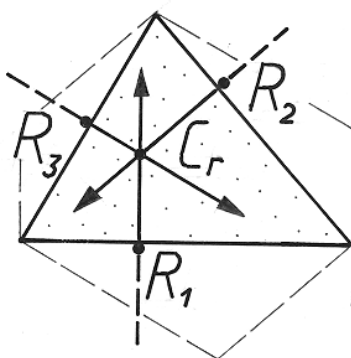
5. ábra

Egy konvex lemez másodfajú rögzítésének első feltétele hárompontos rögzítés esetén az, hogy a támasz-normálisok egy pontban metsződjenek, második feltétele, hogy bármelyik támasz-normális a másik kettő ellentétes vektorának szögtartományába irányuljon, harmadik, hogy közös pontjuk legalább egy támasz-normális hatásos részére essen. E pont a rögzítés C_r centruma (6. ábra).



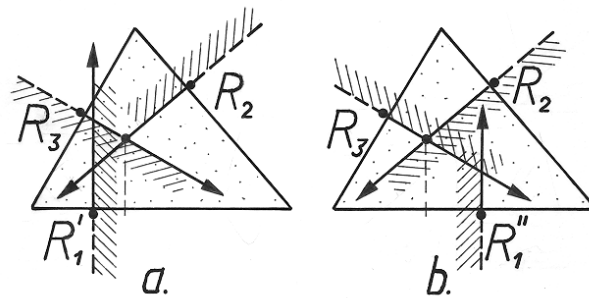
6. ábra

A lehetséges rögzítési centrumok alkotják a centrumidomot. Egy háromszög esetén a centrumidom hatszög vagy parallelogramma (7. ábra).



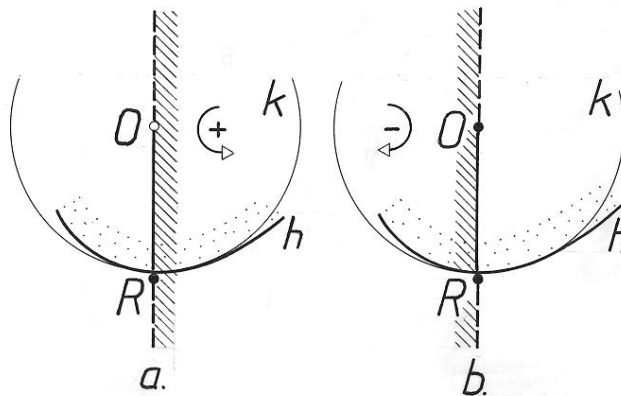
7. ábra

Háromszöglemeznek vannak négy pontos primitív rögzítési lehetőségei is. Ha centrális rögzítés helyett a sík kizáratlanul maradt + ill. – centrum-tartományait a 8. ábra szerint „takarjuk” le.



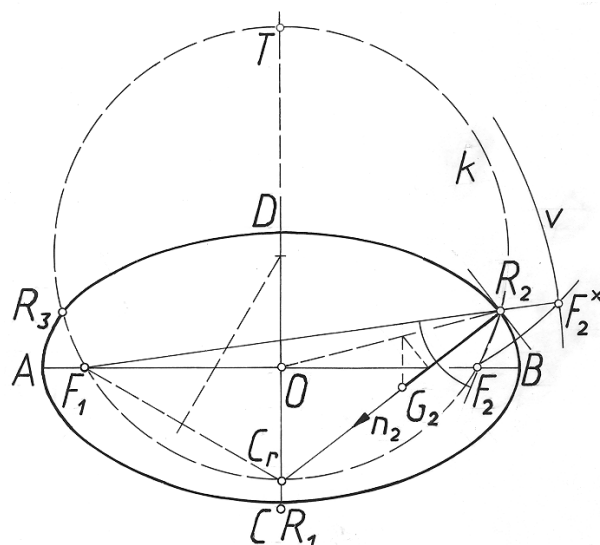
8. ábra

Görbe perem esetén a szabad és kizárt centrum-tartományokat a h peremvonal rögzítő ponthoz tartozó simulókörével együtt ábrázolja a 9. ábra.



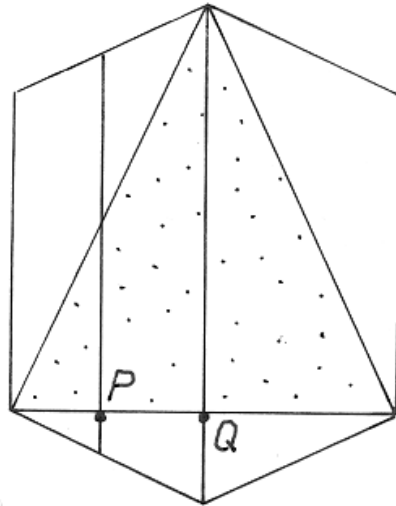
9. ábra

Egy ellipszislemez három pontos rögzítése céljából a rögzítő pontok kijelölése elvégezhető, ha a rögzítési centrumot a tengelyek valamelyikén vesszük fel. Ilyen esetet szemléltet a 10. ábra.



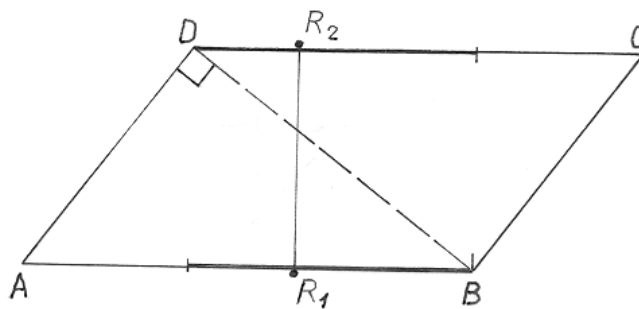
10. ábra

A másodfajú rögzítés esetén a perem egy-egy pontjára értelmezhető a rang. Minél több primitív rögzítő rendszerben szerepel a perem adott pontja, annál nagyobb rangú a másodfajú rögzítés szempontjából. A 11. ábra Q pontja nagyobb rangú, mint a P pont, mert támasz-normálisán több lehetőség van rögzítési centrumok kijelölésére, persze a „több” nem a nagyobb számosság értelmében értendő. Vagyis a perem valamely pontjának rangja a támasz-normális azon darabjának hossza, mely rögzítési centrum lehet.



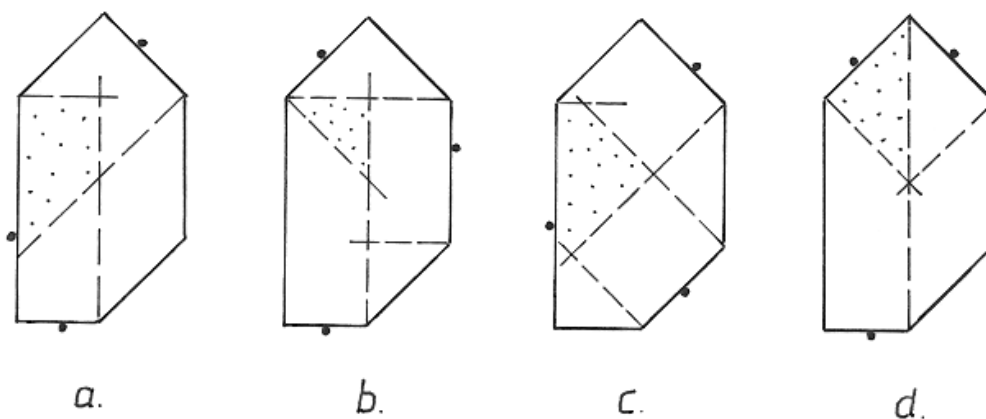
11. ábra

Kétpontos rögzítés esetén a rang a két rögzítő pont egymástól mért távolsága (12. ábra). Az ábra szerint a rövidebb oldalak rangja most zérus, a másik oldalpár egyes szakaszaié ugyancsak.



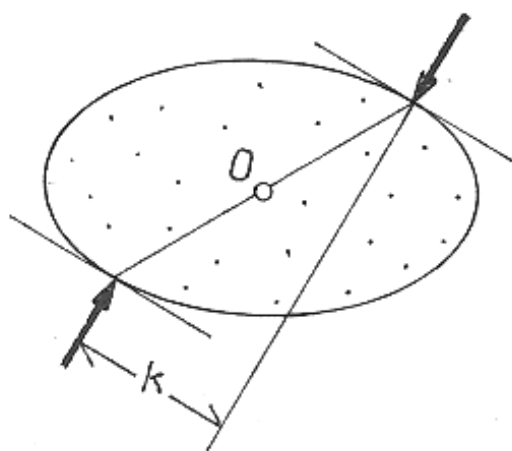
12. ábra

A rang és a centrumidom fogalma lehetővé teszi az optimális rögzítésmód értelmezését. Minél nagyobb a centrumidom területe, annál alkalmasabbnak tekinthető a másodfajú rögzítés szempontjából. Ennek értelmében a 13. ábra szerint az a. rögzítési lehetőség az optimális.



13. ábra

Ha gyakorlati, pontosabban statikai szempontból nézzük a kétpontos rögzítést, és az elforgást a lemezre ható nyomatéknak tulajdonítjuk, kiszámíthatjuk a rögzítő pontokra ható erőket, melyek erőpárt alkotnak. Egységnyinek tekintve az egy-egy rögzítő pont által kifejtendő legnagyobb erőt, bevezethetjük a nyomaték-kapacitás fogalmát. Ez a lemezre ható legnagyobb nyomaték, mely két rögzítő ponttal egyensúlyozható. Ez például ellipszis esetén a 14. ábra szerint $2k$.



14. ábra

De mekkora ez a k ? Vagyis egy ellipszis normálisának mekkora a középponttól mért legnagyobb távolsága? Ez nem tartozik a közismert, ellipszisre vonatkozó tudnivalók közé. Szélsőérték számításom azt mutatta, hogy ez az ellipszis fél tengelyhosszainak szokásos jelölésével $a-b$. Csak véletlenül bukkantam később Szász Pál könyvében is erre az értékre. Az ellipszislemez nyomaték-kapacitása tehát $K = 2(a-b)$. A rögzítési problémák érdekesebb és jóval nehezebb feladatai a térbeli rögzítéssel kapcsolatosak.

A dolgozat készítése során arra a meggyőződésre jutottam, hogy korábbi véleményemmel ellentétben, érdemes lenne feladni a csúcspontban elhe-

lyezhető rögzítő pontra vonatkozó tilalmat. Ez ugyan az eddigiekre vonatkozó megállapítások átgondolását/kibővítését igénylik, de geometriailag érdekesbé tehetné a témát.

Irodalom:

- [1] Tomor B.: Konvex alakzatok egy rögzítési problémája,
Matematikai lapok (1963)
- [2] L. Fejes Tóth: On primitive polyhedra, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 13 (1962)
- [3] E. Steintz: Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. II. Journal f. reine u. angew. Math. 144 (1914)

Sopron, 2017. 10. 22.